

CORRIGÉ 1

① Soit $z \in \mathbb{C}$

$$(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0 \iff 2z + 1 - i = 0 \quad \text{ou} \quad i\bar{z} + i - 2 = 0 \iff$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{ou} \quad \bar{z} = \frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)(-i)}{-i^2} = -1 - 2i \iff z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{ou} \quad z = -1 + 2i$$

② Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = a + ib$.

$$(1+i)\bar{z} + 2 - 5i = z + i - 1 \iff (1+i)(a-ib) + 2 - 5i = a + ib + i - 1 \iff \begin{cases} a+b+2 = a-1 \\ a-b-5 = b+1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -3 \\ a = 0 \end{cases}$$

L'unique solution est $-3i$

CORRIGÉ 2 Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$2z^2 - 4z + 3 = 2(z^2 - 2z) + 3 = 2((z-1)^2 - 1) + 3 = 2(z-1)^2 + 1$$

La forme canonique précédente permet de factoriser :

$$2z^2 - 4z + 3 = 2\left((z-1)^2 + \frac{1}{2}\right) = 2\left((z-1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2\right) = 2\left(z-1-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-1+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

CORRIGÉ 3

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}^2+2i\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \frac{i}{-2+2i\sqrt{3}} = \frac{i(-2-2i\sqrt{3})}{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}-2i}{16} = \frac{\sqrt{3}-i}{8}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}-i}{8} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{16} = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}+i+3i}{16} = \frac{1}{4}i$$

CORRIGÉ 4

① Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P .

$$P(\bar{z}) = \overline{2z^4 + z^3 + 7z^2 + 2z + 6} = \overline{2z^4} + \overline{z^3} + \overline{7z^2} + \overline{2z} + \overline{6} \text{ par compatibilité de la conjugaison avec la multiplication.}$$

$$P(\bar{z}) = \overline{2z^4 + z^3 + 7z^2 + 2z + 6} \text{ par compatibilité de la conjugaison avec l'addition.}$$

Finalement, $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ donc \bar{z} est aussi une racine de P .

② i) Soit $b \in \mathbb{R}$.

$$P(ib) = 2(ib)^4 + (ib)^3 + 7(ib)^2 + 2(ib) + 6 = 2b^4 - ib^3 - 7b^2 + 2ib + 6 = (2b^4 - 7b^2 + 6) + ib(2 - b^2)$$

$$ii) P(ib) = 0 \implies \text{Im}(P(ib)) = 0 \implies b(\sqrt{2} - b)(\sqrt{2} + b) = 0 \implies b \in \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$$

Réciproquement:

$P(0) = 6$ donc 0 n'est pas racine de P .

$$P(i\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}^4 - 7\sqrt{2}^2 + 6) + 0i = 8 - 14 + 6 = 0 \text{ donc } z_1 = i\sqrt{2} \text{ est racine de } P.$$

D'après la question ①, $z_2 = \overline{i\sqrt{2}} = -i\sqrt{2}$ est aussi racine de P .

iii) On en déduit que le polynôme P est factorisable par $(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2}) = z^2 + 2$, c'est-à-dire qu'il existe des complexes a, b, c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a: $P(z) = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c)$.

Comme $P(z)$ et $z^2 + 2$ sont des polynômes à coefficients réels, alors a, b, c sont aussi réels.

L'identification des coefficients donne:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c + 2a = 7 \\ 2b = 2 \\ 2c = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \text{ D'où } P(z) = (z^2 + 16)(2z^2 + z + 3)$$

Le discriminant du polynôme en deuxième facteur est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = -23 = (i\sqrt{23})^2$ et donc ses racines

$$\text{sont } z_3 = \frac{-1+i\sqrt{23}}{4} \text{ et } z_4 = \bar{z}_3 = \frac{-1-i\sqrt{23}}{4}.$$

Comme un polynôme de degré 4 admet au plus 4 racines, on peut affirmer qu'on a trouvé toutes les racines de

$$P, \text{ qui sont } i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}, \frac{-1+i\sqrt{23}}{4} \text{ et } \frac{-1-i\sqrt{23}}{4}$$